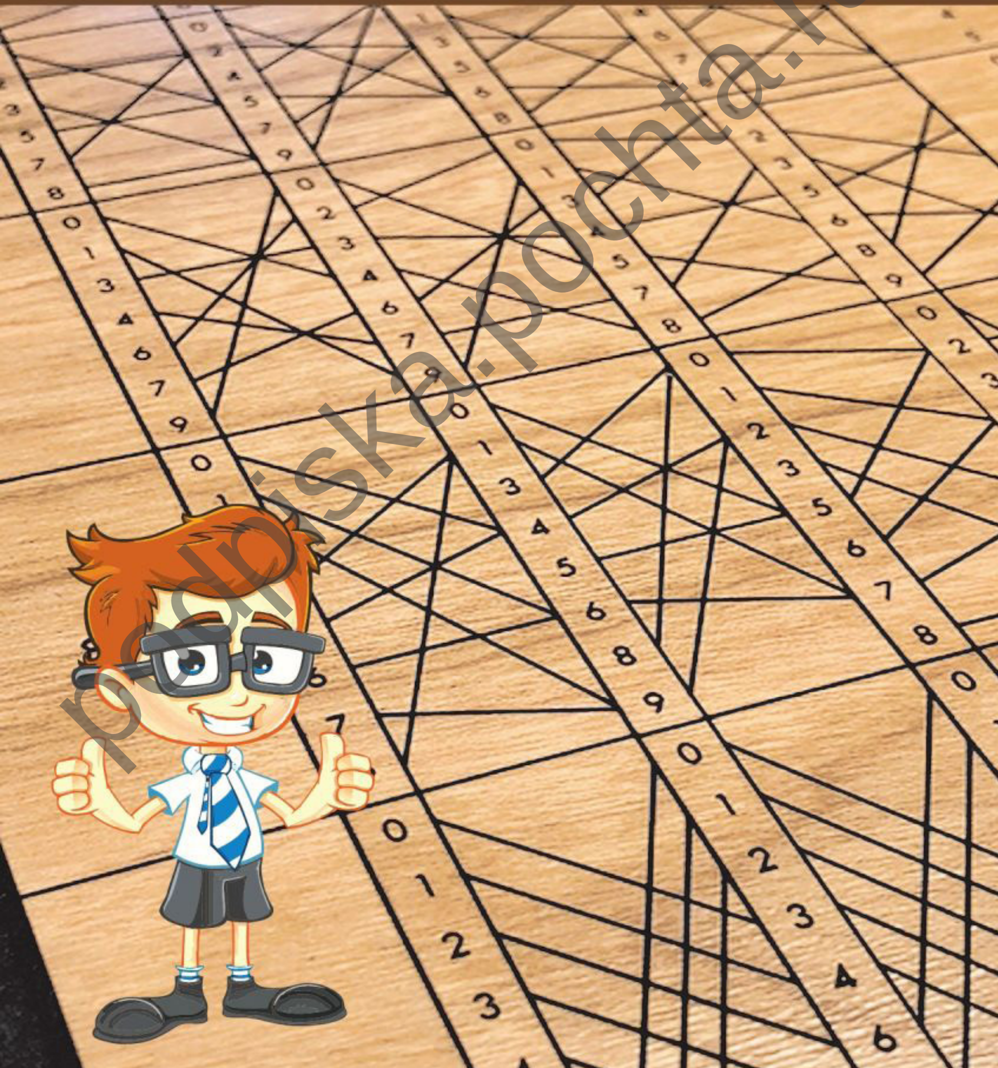
ISSN 0130-2221
2022 · № 6
ИЮНЬ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



КВАНТ ИЮНЬ 2022 №6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

2 Игра в нетранзитивные кости. *Д.Фомин*

9 Парадоксы теплообмена: невероятный теплообменник. *Е.Соколов*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

18 Бруски Женя–Люка. *Д.Златопольский*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

23 Задачи М2702–М2705, Ф2709–Ф2712

24 Решения задач М2690–М2693, Ф2697–Ф2700

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

30 Итоги конкурса 2021/22 учебного года

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

31 Задачи

34 Как реки освобождаются ото льда. *Т.Морозова*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

32 «Квант» улыбается

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

37 Математические секреты проектирования многоступенчатых ракет. *М.Никитин, А.Тепляков*

ИНФОРМАЦИЯ

41 Очередной набор в ВЗМШ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

45 Олимпиада «Покори Воробьевы горы!». Физика

51 Ответы, указания, решения

Вниманию наших читателей (8,17,22)

НА ОБЛОЖКЕ

I *Иллюстрация к статье Д.Златопольского*

II *Коллекция головоломок*

III *Шахматная страничка*

IV *Прогулки с физикой*

Игра в нетранзитивные кости

Д.ФОМИН

Мы начнем с одного, хотя и простого, но необычного варианта распространенной игры в кости с двумя участниками. Допустим, что кости, используемые для игры, не одинаковы и не являются хорошо знакомыми нам всем стандартными кубиками, на которых написаны числа от 1 до 6. А именно, предположим, что каждый игрок имеет собственный игральный кубик с неким набором чисел, написанных на его гранях. Оба игрока одновременно бросают свои кубики и выигрывает тот, у кого выпало большее число, после чего проигравший платит выигравшему 1 рубль. Для простоты изложения давайте пока будем считать, что у разных игроков числа разные, т.е. никакое число на одном кубике не совпадает ни с одним из чисел на другом кубике (обозначим это ограничение значком $*$).

Например, несложный перебор вариантов показывает, что кубик A с числами 1, 8, 11, 12, 13, 14 в среднем выигрывает у кубика B с числами 5, 6, 7, 9, 10, 18. И в самом деле, среди 36 возможных и равновероятных[1] вариантов выпадения чисел на этих двух кубиках имеется 23 таких, когда число на первом кубике строго больше, чем число на втором. Поскольку $23 > 18 = 36/2$, то мы можем говорить, что первый кубик «выгоднее» или «сильнее» второго. Можно также сказать, что *вероятность* того, что при случайном броске обоих кубиков победит кубик A, равна 23/36. Тогда средний выигрыш игрока с первым кубиком будет примерно 28 копеек. И в самом деле, с вероятностью 23/36 этот игрок получает 1 рубль, а с вероятностью $1 - 23/36 = 13/36$ он теряет ту же сумму. Значит, его средний выигрыш (в рублях) составляет

$$\frac{23}{36} - \frac{13}{36} = \frac{10}{36} \approx 0,2777.$$

Ясно, что такая игра с самого начала несправедлива, так как одному из игроков достался кубик, который заметно «сильнее» другого. Это можно сравнить с тем, как если бы в футбольном матче примерно равных по силе команд у одной из них в самом начале встречи удалили одного игрока.

Есть ли какой-то несложный способ восстановить справедливость игры? Конечно, есть! Давайте отринем идею личных кубиков, а предположим, что имеется общий игровой набор из двух кубиков, и разрешим игрокам самим выбирать свою игральную кость. Но… это никак не должно нам помочь, ведь первый игрок простонапросто выберет кубик A, и дальше все пойдет, как и раньше.

И тут, в продолжение предыдущей идеи, которая оказалась не такой уж и удачной, возникает новая, совершенно неожиданная и, на первый взгляд, бессмысленная идея. Что если мы добавим еще один кубик (или даже несколько), и пусть игроки выбирают не из двух кубиков, а из трех (или четырех и так далее). Казалось бы, это не должно решить проблему несправедливости набора игральных кубиков – ведь один из них все равно будет самый сильный.

И все-таки попробуем – добавим третий кубик $C = (2, 3, 4, 15, 16, 17)$. Мы уже подсчитали, что игрок с кубиком A выигрывает у того, кто бросает кубик B, с вероятностью 23/36. Продолжая наши вычисления, получим, что кубик B выигрывает у

[1] Мы предполагаем, что кубик у каждого игрока «честный», т.е. все его грани выпадают с одной и той же вероятностью.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220601

Крестьяне, играющие в кости. Давид Тенирс Младший (коллекция Эрмитажа)

кубика C с вероятностью $21/36 = 7/12$. Значит, кубик A сильнее, чем B, а B сильнее, чем C, ну и стало быть, кубик A по-прежнему сильнее всех. Осталось только убедиться в этом и сравнить кубики A и C. И тут вдруг оказывается, что… C выигрывает у A с вероятностью $7/12$.

Как же такое возможно? Ведь все эти три вероятности превосходят $1/2$ и получается, что A сильнее, чем B, B сильнее, чем C, а C сильнее, чем A. Так не бывает!

Для упрощения нашего исследования давайте формально определим, что же именно означает тут слово «сильнее».

Определение 1. Будем говорить, что набор чисел $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *сильнее* набора чисел $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, если среди mn неравенств $a_i > b_j$ $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ более половины являются верными. Если набор A сильнее, чем набор B, то мы будем обозначать это отношение через $A \succ B$.

Наш пример с тремя кубиками показывает, что это отношение не является *транзитивным*. В математике транзитивным называется такое отношение между множествами, числами или другими объектами, которое «распространяется» по цепочке. Например, если есть три таких целых числа a, b и c, что $a > b$ и $b > c$, то тогда $a > c$. Так вот, в данном случае, это не так — ведь кубики A, B и C таковы, что

$$A \succ B \succ C \succ A.$$

Интуиция говорит нам, что так быть не должно, ведь если A выигрывает у B чаще, чем проигрывает ему, и то же самое верно для B по отношению к C, то тогда кубик A должен «побеждать» кубик C. Оказывается, что не все так просто, и, как мы уже продемонстрировали, вообще говоря, это неверно.[2]

Вот наш первый пример нетранзитивных кубиков.

Пример 1

$$\begin{array}{lclcccccccc} A &=& (& 1, & 8, & 11, & 12, & 13, & 14 &), \\ B &=& (& 5, & 6, & 7, & 9, & 10, & 18 &), \\ C &=& (& 2, & 3, & 4, & 15, & 16, & 17 &). \end{array}$$

Получается, что в игре с двумя участниками, где каждый сам выбирает себе игровую кость из данного набора, всегда выиг-

[2] Впервые этот парадокс был обнаружен в 1959 году польскими математиками Хуго Штейнгаузом и Станиславом Трыбулой [1].

рывает второй игрок – он попросту будет брать себе тот кубик, который сильнее кубика, выбранного первым игроком. В этом замечательном наборе из трех кубиков нет самого сильного кубика, поскольку каждый из них слабее какого-то другого.

После такого выбора каждый бросок игральных костей приносит второму игроку гарантированный средний выигрыш, равный примерно 17 копейкам. И в самом деле, из трех вероятностей выигрыша 23/36, 21/36 и 21/36 наименьшая равна 21/36 и в такой ситуации (когда первый игрок выбирает кубик A, а второй, конечно же, берет себе кубик C) средний выигрыш второго игрока равен $7/12 - 5/12 = 1/6$ рубля, т.е. $16\frac{2}{3}$ копейки.

Эти кубики нетрудно изготовить самому из картона. Воспользуйтесь, например, такими развертками (рис. 1).

А вот еще один набор игральных костей,

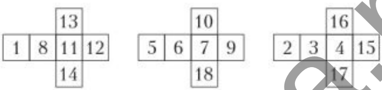


Рис. 1

немного попроще.

Пример 2

$$A = (\ 2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 9,\ 9\ ),$$
$$B = (\ 1,\ 1,\ 6,\ 6,\ 8,\ 8\ ),$$
$$C = (\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7\ ).$$

Тут все три вероятности выигрыша в цепочке $A \succ B \succ C \succ A$ одинаковы и равны $5/9 > 1/2$.

Если хорошенько подумать, то станет понятно, что нет ничего особенного в существовании таких «невозможных» игральных кубиков. Подобная нетранзитивность нам всем хорошо известна, например, по игре «камень–ножницы–бумага». И в других играх и видах спорта есть масса подобных примеров.

Здесь мы ограничимся лишь одним из них, выбранном нами практически случайно из классических шахмат элитного уровня. Как показывает нам статистика сайта Chess Games на август 2021 года, российский гроссмейстер Петр Свидлер обычно побеждает американца Хикару Накамуру (+7 – 2 = 11 , т.е. семь побед, два поражения, одиннадцать ничьих), Накамура в свою очередь обычно выигрывает у гроссмейстера Сергея Карякина (+8 – 5 = 24), но при этом Карякин имеет весьма положительный результат против Свидлера (+9 – 5 = 23). Вот и пойди разберись, кто из этих трех шахматистов *сильнее*. Тут приходит на память книжка Льва Кассиля «Кондуит и Швамбрания», где мальчик Ося озадачивает взрослых вопросом «А если слон вдруг на кита налезет, кто кого сборет?»

И наконец, еще один важный пример нетранзитивности – это проблема выбора по нескольким критериям. Что здесь имеется в виду? Представим себе, что в выборах президента Страны Дураков участвуют трое кандидатов, Дуремар, Буратино и Мальвина, которых вы оцениваете по тому, какую позицию они занимают по следующим шести параметрам: налоги, иммиграционная политика, судебная реформа, образование, здравоохранение и борьба с коррупцией. По каждому из этих шести важных вопросов вы определили, какой кандидат нравится вам больше всего (оценка – 3 очка), какой – меньше всего (1 очко), ну а третий – серединка на половинку (2 очка). В результате многодневной тщательной аналитической работы у вас получилась следующая сводная таблица:

	налог	иммиг.	суды	образ.	здрав.	кор.
Дуремар	3	2	1	3	1	2
Буратино	2	1	3	2	3	1
Мальвина	1	3	2	1	2	3

За кого же вам голосовать? Дуремар лучше Буратино по четырем из шести параметров, так что вам, видимо, надо голосовать за него. Но ведь Мальвина лучше Дуремара – тоже по четырем параметрам из шести (правда, по другим четырем). Ну тогда, конечно, ясно, что Мальвина и есть самый правильный для вас кандидат – ведь она лучше Дуремара, а Дуремар лучше Буратино. Но тут выясняется, что в этом мини-конкурсе, где кандидаты борются за ваш голос, Буратино побеждает Мальвину, причем тоже по четырем параметрам из шести. Приходится махнуть на все это рукой и, выкинув вашу табличку в мусорное ведро, голосовать за Мальвину, потому что она убедительнее всех излагает свою предвыборную программу, и к тому же она закончила тот же университет, в котором когда-то учились и вы сами.

Возвращаясь к нетранзитивным кубикам, надо упомянуть, что любителям математики и логических головоломок уже давно известны аналогичные наборы и из четырех кубиков – например, так называемые *кубики Эфрона*.

Пример 3 (кубики Эфрона)

$$
\begin{array}{lcl}
A & = & (\ 0,\ 0,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4\ ),\\
B & = & (\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3\ ),\\
C & = & (\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 6,\ 6\ ),\\
D & = & (\ 1,\ 1,\ 1,\ 5,\ 5,\ 5\ ).
\end{array}
$$

Обратите внимание, что каждый кубик в этом наборе побеждает следующий (а последний кубик побеждает первый) с одной и той же вероятностью, равной 2/3. Это означает, что если вы играете с кем-то в кости, пользуясь кубиками Эфрона – как «истинный джентльмен», вы, конечно же, уступаете вашему оппоненту право первому выбрать себе «самый лучший» кубик, – то вам гарантирован средний выигрыш, равный примерно 33 копейкам за один бросок костей. Очень даже неплохо, не правда ли? Во всяком случае, это лучше, чем то, чего вы можете добиться в примерах 1 и 2.[3]

Также можно подобрать набор из семи кубиков таких, что для любых двух (!) из них существует другой кубик набора, который выигрывает у *обоих* выбранных кубиков. Это означает, что в игре с тремя участниками, где каждому из них разрешается выбрать себе кубик из такого набора, полную победу одержит тот, кто выбирает последним – он всегда может выбрать кубик, который сильнее обоих выбранных первым и вторым игроками. Этот набор известен под названием *кубиков Оскара*.

Пример 4 (кубики Оскара)

$$
\begin{array}{lcl}
A & = & (\ 2,\ 2,\ 14,\ 14,\ 17,\ 17\ ),\\
B & = & (\ 7,\ 7,\ 10,\ 10,\ 16,\ 16\ ),\\
C & = & (\ 5,\ 5,\ 13,\ 13,\ 15,\ 15\ ),\\
D & = & (\ 3,\ 3,\ 9,\ 9,\ 21,\ 21\ ),\\
E & = & (\ 1,\ 1,\ 12,\ 12,\ 20,\ 20\ ),\\
F & = & (\ 6,\ 6,\ 8,\ 8,\ 19,\ 19\ ),\\
G & = & (\ 4,\ 4,\ 11,\ 11,\ 18,\ 18\ ).
\end{array}
$$

Задача 1. *В наборе Оскара найдите кубик, который побеждает кубики B и D.*

Настало время ввести простейшую терминологию и обозначения для исследования нашей игры.

Определение 2. В игре с костями A и B будем обозначать вероятность выигрыша игрока с костью A через $p(A \succ B)$, а средний выигрыш игрока с костью A – через $w(A \succ B)$.

Например, для кубиков Оскара C и F мы имеем $p(C \succ F) = 2/3$ и $w(C \succ F) = 2/3 - 1/3 = 1/3$. Также $p(B \succ E) = 4/9$ и $w(B \succ E) =$

[3] В русскоязычной научно-популярной литературе описание кубиков Эфрона и парадокса нетранзитивных костей впервые появилось в замечательной книге «Крестики-нолики» [2] известного популяризатора математики Мартина Гарднера.

$= 4/9 - 5/9 = -1/9$. Отрицательный средний выигрыш $(-1/9)$, естественно, означает средний проигрыш, равный 1/9.

Для любого набора из m костей

$$\mathcal{A} = \left\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(m)}\right\}$$

мы можем построить полный граф $K_{\mathcal{A}}$, в котором кости – это вершины, а каждое его ребро UV можно ориентировать в направлении от более слабой кости к более сильной (если они равны по силе, то выберем ориентацию наобум) и пометить неотрицательным числом, равным модулю среднего выигрыша $w(V \succ U)$, которое мы будем называть *весом* этого ребра. Такой граф проще всего описать при помощи *матрицы вероятностей выигрыша*, т.е. квадратной таблицы размером $m \times m$, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца написано число $p\left(A^{(i)} \succ A^{(j)}\right)$.

Определение 3. Для каждой кости $U = A^{(k)}$ в наборе $\mathcal{A}$ найдем другую кость $V = A^{(j)}$, для которой средний выигрыш $w(V \succ U)$ является максимально возможным (если имеется несколько таких костей, то мы выбираем одну из них случайным образом), после чего отметим ориентированное ребро $\overrightarrow{UV}$. Эти m ребер определяют *ориентированный взвешенный граф* $G_{\mathcal{A}}$ с m вершинами и m ориентированными ребрами (при этом каждое из этих ребер помечено его весом) такой, что в этом графе из каждой вершины выходит ровно одно ребро (а вот входить в данную вершину могут сразу несколько ребер или вовсе ни одного ребра).

В качестве примера рассмотрим кубики Оскара. Тогда матрица вероятностей и граф $G_{\mathcal{A}}$ (точнее, один из графов $G_{\mathcal{A}}$) выглядят так, как показано на рисунках 2 и 3.

	A	B	C	D	E	F	G
A	1/3	5/9	5/9	4/9	5/9	4/9	4/9
B	4/9	1/3	5/9	5/9	4/9	5/9	4/9
C	4/9	4/9	1/3	5/9	5/9	4/9	5/9
D	5/9	4/9	4/9	1/3	5/9	5/9	4/9
E	4/9	5/9	4/9	4/9	1/3	5/9	5/9
F	5/9	4/9	5/9	4/9	4/9	1/3	5/9
G	5/9	5/9	4/9	5/9	4/9	4/9	1/3

Рис. 2

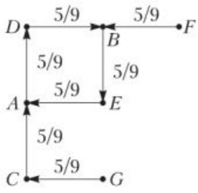


Рис. 3

При помощи графа $G_{\mathcal{A}}$ можно наглядно продемонстрировать стратегию второго игрока, которая позволяет ему максимизировать свой средний выигрыш. Пусть первый игрок выбрал кость U – в графе есть ровно одно ребро, выходящее из U. Тогда второму игроку надо выбрать кость V, в которую ведет это ребро. По определению 3 графа $G_{\mathcal{A}}$ этот выбор даст ему наибольшую вероятность выигрыша, а следовательно, и наибольший средний выигрыш.

Теперь давайте избавимся от кубиков (которые имеют всего шесть граней) и обобщим нашу задачу на случай произвольных наборов чисел. Дадим следующее определение.

Определение 4. Последовательность наборов чисел $A_1, A_2, \ldots, A_m$ будем называть *нетранзитивной цепочкой*, если

$$A_1 \succ A_2 \succ \ldots \succ A_m \succ A_1.$$

Продолжая изучение нетранзитивных кубиков, естественно задать вопрос – для каких m и n существуют нетранзитивные цепочки из m наборов чисел по n (или менее) чисел в каждом?

Задача 2. *Для каких $m, n \in \mathbb{N}$ существуют m непересекающихся наборов $A_1, \ldots, A_m$ таких, что каждый из них содержит не более чем n чисел и при этом*

$$A_1 \succ A_2 \succ \ldots \succ A_m \succ A_1?$$

Во-первых, совершенно очевидно, что нетранзитивная цепочка должна иметь длину 3 или больше.

Во-вторых, совсем нетрудно понять, что наборы в такой цепочке не могут состоять лишь из одного или двух чисел. И в самом деле, если набор A состоит из двух чисел $a_1 \le a_2$, а набор B – из двух чисел $b_1 \le b_2$, то для выполнения соотношения $A \succ B$ необходимо, чтобы $a_1 > b_1$. А это, конечно же, означает, что нетранзитивная цепочка таких наборов невозможна.

Аналогично, не может существовать нетранзитивная цепочка произвольной дли-